Solución de Guía 1. Fundamentos de la Computación

1. En los siguientes ejercicios demuestre las siguientes propiedades de conjuntos usando demostración directa y con diagramas de Venn:
2. (A ∩ B)′ = A′ ∪ B′ b) A ∪ (A∩B) = A

**Solución**:

1. (A ∩ B)′ = A′ ∪ B′

x ∈ (A ∩ B)′ ⇔ x ∈ U y x ∉ (A ∩ B) ⇔ x ∈ U y no [x∈(A ∩ B)] ⇔ x ∈ U y no [x∈A y x∈B] ⇔ x∈U y [x∉A o x∉B] ⇔ [x∈U y x∉A] o [x∈U y x∉B] ⇔ x∈A’ o x∈B’ ⇔ x∈(A′ ∪ B′).

Luego: (A ∩ B)′ = A′ ∪ B′.

1. A ∪ (A∩B) = A

x ∈ A ∪ (A∩B) ⇒ x∈A o x∈(A∩B) ⇒ x∈A o (x∈A y x∈B) ⇒ x∈A en ambos casos, por lo que x∈A. Luego A ∪ (A∩B) ⊆ A.

Inversamente, si x∈A ⇒ x ∈ A∪(A∩B), luego A ⊆ A∪(A∩B).

Luego A ∪ (A∩B) = A.

1. Demostrar usando propiedades de conjuntos que si A y B son subconjuntos de un universo U entonces: A – (A – B) = A ∩ B.

**Solución**: A – B = A ∩ B’, A – (A – B) = A ∩ (A ∩ B’)’ = A ∩ (A’ ∪ B)

= [A ∩ A’] ∪ A∩B = ∅ ∪ A∩B = A∩B.

1. Para las siguientes relaciones determinar los elementos de la relación y verificar qué propiedades verifican (refleja, simétrica, antisimétrica, transitiva):
2. X = {2, 3, 4}

R1 = {(x, y) ∈ X x X/x divide a y exactamente}

1. X = {a, b, c}

R2 = {(x, y) ∈ X x X/y = x}

1. X = {1, 2, 3, 4}

R3 = {(x, y) ∈ X x X/x2 ≥ y}

**Solución**:

1. R1 = {(x, y) ∈ X x X/x divide a y exactamente}

R1 = {(2, 2), (2, 4), (3, 3), (4, 4)}

Se observa que R1 es reflexiva, no es simétrica (está el (2, 4) pero no el (4, 2)), y no tiene elementos para ser antisimétrica. Si es transitiva.

1. R2 = {(x, y) ∈ X x X/y = x} con X = {a, b, c}

R2 = {(a, a), (b, b), (c, c)}

Cumple todas las propiedades.

1. R3 = {(x, y) ∈ X x X/x2 ≥ y} con X = {1, 2, 3, 4}

R3 = {(1, 1), (2, 1), (3, 1), (4, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 2), (3, 3), (3, 4),

(4, 2), (4, 3), (4, 4)}

Es reflexiva, no es simétrica (el par (2, 1) está pero (1, 2) no), no es antisimétrica (están los pares (2, 3) y (3, 2) pero 2 ≠ 3) y es transitiva.

1. Sean X = {1, 2, 3, 4, 5}, Y = {3, 4} y se define la relación R sobre ℘(X) tal que: A R B ⇔ A∪Y = B∪Y.
2. Demostrar que R es una relación de equivalencia
3. ¿Cuántas clases de equivalencia distintas tiene R?
4. Si C = {1, 3}, determinar la clase de equivalencia de C

**Solución**:

1. R es relación de equivalencia

Reflexiva: A R A ⇔ A∪Y = A∪Y (se verifica)

Simetría: A R B ⇒ A∪Y = B∪Y ⇒ B∪Y = A∪Y ⇒ B R A

Transitividad: A R B y B R C ⇒ A∪Y = B∪Y y B∪Y = C∪Y

⇒ A∪Y = C∪Y ⇒ A R C

1. La cardinalidad de ℘(X) es 25 = 32 elementos de los cuales R tiene 8 clases de equivalencia distintas.
2. [A] = {B / A∪Y = B∪Y}

[{1, 3}] = {B / {1, 3, 4} = B∪{3, 4}} = {{1, 3}, {1}, {1, 4}, {1, 3, 4}}

[∅] = {B / {3, 4} = B∪{3, 4}} = {∅, {3, 4}, {3}, {4}}

[{2}] = {B / {2, 3, 4} = B∪{3, 4}} = {{2}, {2, 3}, {2, 4}, {2, 3, 4}}

[{5}] = {B / {3, 4, 5} = B∪{3, 4}} = {{5}, {5, 3}, {5, 4}, {3, 4, 5}}

[{1,2}] = {B/{1,2,3,4} = B∪{3,4}} = {{1,2},{1,2,3},{1,2,4},{1,2,3,4}}

[{1,5}] = {B/{1,3,4,5} = B∪{3,4}} = {{1,5},{1,3,5},{1,4,5},{1,3,4,5}}

[{2,5}] = {B/{2,3,4,5} = B∪{3,4}} = {{2,5},{2,3,5},{2,4,5},{2,3,4,5}}

[{1,2,3,4,5}] = {B/{1,2,3,4,5} = B∪{3,4}}

= {{1,2,3,4,5},{1,2,5},{1,2,3,5},{1,2,4,5}}

1. Verificar si son o no funciones las siguientes relaciones, si son inyectivas y/o sobreyectivas y determinar Im(f):
2. A = {1,2,3,4,5}, B = {1,4,7,8} tal que f = {(2,1),(3,1),(3,8),(4,4),(5,4)}
3. f: ℕ🡪ℤ tal que: f(n) = (n – 1)/2 si n es impar, f(n) = n/2 si n es par
4. f: ℕ🡪ℕ≥2 en que ℕ≥2  son los naturales ≥ 2, tal que: f(n) = n + 1

**Solución**:

1. No es función (está el par (3, 1) y el (3, 8)).
2. Es función inyectiva porque f(x) = f(y) ⇒ x = y. Im(f) = ℕ≥0 luego no es sobreyectiva.
3. Es función biyectiva.
4. Probar usando inducción que para todo n ≥ 1:

**Solución**:

Base: en n = 1 se tiene: 4 – 3 = 1 = 1(2 – 1) (se verifica)

Hipótesis: lo propuesto

Tesis: por demostrar:

1. Probar usando inducción que para todo n ≥ 1:

**Solución**:

Base: en n = 1 se tiene: 4 + 1 = 5 = 1(2 + 3) = 5 (se verifica)

Hipótesis: lo propuesto

Tesis: por demostrar: